

2. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений. М.: КомКнига (URSS), 2005.

3. Гельман Б.Д. Операторные уравнения и задача Коши для вырожденных включений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Математика, физика. Воронеж, 2007. № 2. С. 86-91.

Gelman B.D., Zavyalova A.V. CLASS OF DEGENERATE DIFFERENTIAL INCLUSIONS

This article focuses on the study of multivalued condensing perturbations surjective continuous linear operators. It considers the theorem on the solvability of a class of operator inclusions with surjective operators. The resulting theorem is used to study the solvability of degenerate differential inclusions.

Key words: surjective operator continuous linear operator-valued condensing mapping; differential inclusions. УДК 517.958

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

© Ю.А. Гнилицкая, В.В. Провоторов

Ключевые слова: краевые и начально-краевые задачи на графе; обобщенное решение; однозначная разрешимость; оптимальное управление.

Рассматриваются обобщенные решения краевой и начально-краевых задач с распределенными параметрами на произвольном геометрическом графе. Ставится задача оптимального управления дифференциальными системами в терминах минимизации некоторого функционала и получения необходимых и достаточных условий существования минимума функционала.

В классе $W_2^1(\Gamma)$ (Γ — произвольный компактный ориентированный граф; $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих первую обобщенную производную из $L_2(\Gamma)$, норма в $W_2^1(\Gamma)$ определяется скалярным произведением $(\varphi, \psi)_{W_2^1(\Gamma)} \equiv \int_{\Gamma} \left(\varphi \psi + \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dx} \right) dx$) рассматривается эллиптическая система, описываемая задачей Дирихле

$$L(y, \psi) \equiv \int_{\Gamma} a(x) \frac{dy(x)}{dx} \frac{d\psi(x)}{dx} + b(x)y(x)\psi(x) = \int_{\Gamma} f(x)\psi(x)dx + \int_{\Gamma} Bu(x)\psi(x)dx \quad (1)$$

для любых $y(x) \in W_{2,0}^1(\Gamma)$ ($W_{2,0}^1(\Gamma)$ — замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества непрерывных во всех узлах графа Γ функций класса $W_2^1(\Gamma)$, для которых сужения $(a(x) \frac{dy(x)}{dx})_{\gamma}$ на ребра $\gamma \in \Gamma$ непрерывны в концевых точках ребер γ , принадлежащих множеству внутренних узлов Γ , и для которых выполняются соотношения

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{du(0)_{\gamma_j}}{dx} \quad (2)$$

вместе с краевыми условиями $y|_{\partial\Gamma} = 0$, где $R(\xi)$, $r(\xi)$ — число ребер, примыкающих к узлу ξ и ориентированных «к узлу ξ » и «от узла ξ », соответственно), $f(x) \in L_2(\Gamma)$, $u(x) \in L_2(\Gamma)$, B — линейный непрерывный оператор в $L_2(\Gamma)$. Коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ — измеримые ограниченные функции на Γ :

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \tilde{b}, \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$

Т е о р е м а 1 [1]. Для заданных $f(x)$ и $u(x)$ существует единственный элемент $y(x) \in W_{2,0}^1(\Gamma)$, для которого выполняется соотношение (1).

Сформулируем задачу оптимального управления. Пусть задано пространство управлений $U = L_2(\Gamma)$ и оператор $B: U \rightarrow L_2(\Gamma)$. Пусть некоторая система (физическая, механическая и т. д.) описывается соотношением (1): для каждого управления $u \in U$ состояние y системы определяется как функция $y(u)$. Пусть задано наблюдение $z(u) = Cy(u)$, где $C: W_{2,0}^1(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$ — линейный непрерывный оператор. На U зададим функционал (функция стоимости [2])

$$J(u) = \|Cy(u) - z_0\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma} Nu \cdot u dx, \quad (4)$$

где z_0 — заданный элемент пространства $L_2(\Gamma)$; линейный непрерывный оператор $N: U \rightarrow U$ положительно определен и симметричен, причем для любого $u \in U$: $\int_{\Gamma} Nu \cdot u dx \geq \alpha \|u\|_{L_2(\Gamma)}^2$ ($\alpha > 0$).

Задача оптимального управления эллиптической системой (1) состоит в отыскании

$$\inf_{v \in U^\circ} J(v), \quad (5)$$

U° — выпуклое замкнутое подмножество в U .

Задание оператора наблюдения C на всем $W_{2,0}^1(\Gamma)$ означает, что состояние $y(u)$ системы (1) наблюдается на всем Γ .

Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы элемент $u \in U^\circ$ был оптимальным управлением, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения:

$$\begin{aligned} L(y(u), \psi) &= \int_{\Gamma} f(x)\psi(x)dx + \int_{\Gamma} Bu(x)\psi(x)dx, \quad \forall \psi(x) \in W_{2,0}^1(\Gamma), \\ L(p(u), \psi) &= \int_{\Gamma} C^*(Cy(u) - z_0)\psi dx, \quad \forall \psi(x) \in W_{2,0}^1(\Gamma), \\ \int_{\Gamma} (B^*p(u) + Nu)(v - u)dx &\geq 0, \quad \forall v \in U^\circ, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь B^* и C^* — операторы, сопряженные к B и C , соответственно.

Аналогичные задачи распределенного на графе Γ управления рассматриваются для параболических и гиперболических систем на $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$. Соответствующие начально-краевые задачи рассматриваются в классах $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ и $W_2^1(\Gamma_T)$ [1] ($W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ — пространство функций $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную первого порядка по x из $L_2(\Gamma_T)$, норма в $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ определяется скалярным произведением $(u, v)_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)} \equiv \int_{\Gamma_T} (uv + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}) dx dt$; $W_2^1(\Gamma_T)$ — пространство функций $u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка, норма определяется скалярным произведением $(u, v)_{W_2^1(\Gamma_T)} \equiv \int_{\Gamma_T} (uv + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}) dx dt$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Волкова А.С., Гнилицкая Ю.А., Провоторов В.В. О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе // Системы управления и информационные технологии. 2013. №1 (51). С. 11-15.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

Gnilitskaya Y.A., Provotorov V.V. CONTROL OF DISTRIBUTED SYSTEMS ON A GEOMETRICAL GRAPH

The generalized solutions of boundary value problems with distributed parameters on an arbitrary geometrical graph is considered. The task of optimal control of differential systems in terms of a functional

minimization and obtaining the necessary and sufficient conditions for the existence of the minimum of functional is set.

Key words: Boundary and initial-boundary value problems on graph; generalized solutions; one-valued solvability; optimal control.

УДК 517.977

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ПРОЦЕДУРЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОПТИМАЛЬНОЙ ГАРАНТИЕЙ РЕЗУЛЬТАТА

© М.И. Гомоюнов, Н.Ю. Лукоянов

Ключевые слова: оптимальное управление; дифференциальные игры; устойчивость.

Рассматривается задача о вычислении оптимального гарантированного результата и построении соответствующих оптимальных стратегий обратной связи в линейной динамической системе, управляемой в условиях помех. Оптимизируется евклидова норма совокупности отклонений движения в заданные моменты времени от заданных целей. Исследуется вопрос об устойчивости разрешающей процедуры, основанной на построении выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций из метода стохастического программного синтеза.

Рассматривается управляемая динамическая система

$$dx/dt = A(t)x + f(t, u, v), \quad t_0 \leq t < \vartheta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^s, \quad x(t_0) = x_0,$$

при показателе качества

$$\gamma = \sqrt{\|D_1(x(\vartheta_1) - c_1)\|^2 + \|D_2(x(\vartheta_2) - c_2)\|^2 + \dots + \|D_N(x(\vartheta_N) - c_N)\|^2}.$$

Здесь t — время, x — фазовый вектор, u — вектор управления, v — вектор помехи; t_0 , ϑ и $\vartheta_i \in [t_0, \vartheta]$, $i = \overline{1, N}$, зафиксированы, причем $\vartheta_{i+1} > \vartheta_i$, $i = \overline{1, N-1}$ и $\vartheta_N = \vartheta$; P и Q компактны; $A(t)$ и $f(t, u, v)$ непрерывны; $(p_i \times n)$ -матрицы D_i и n -векторы c_i заданы, $i = \overline{1, N}$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма; выполнено условие седловой точки для маленькой игры [1, с. 79]; цель управления — минимизация показателя γ .

В рамках теоретико-игрового подхода [1, 2] ставится задача о вычислении оптимального гарантированного результата $\Gamma^0(t_0, x_0)$ и построении закона управления по принципу обратной связи, обеспечивающего этот результат. Согласно [2–4], эта задача может быть решена на основе следующей процедуры.

Пусть $\Delta_k = \{\tau_j : \tau_1 = t_0, \tau_j < \tau_{j+1}, j = \overline{1, k}, \tau_{k+1} = \vartheta\}$, $\vartheta_i \in \Delta_k$, $i = \overline{1, N}$, и $X(t, \tau)$ — матрица Коши для уравнения $dx/dt = A(t)x$. Для $j = \overline{1, k+1}$ определим множества $G_j^\pm \subset \mathbb{R}^n$ и функции $\varphi_j^\pm(m)$, $m \in G_j^\pm$. При $j = k+1$ полагаем $G_{k+1}^+ = \{0\}$, $\varphi_{k+1}^+(m) = 0$ и

$$G_{k+1}^- = \{m \in \mathbb{R}^n : m = D_N^T l, l \in \mathbb{R}^{p_N}, \|l\| \leq 1\}, \quad \varphi_{k+1}^-(m) = -\langle m, c_N \rangle,$$

где верхний индекс T означает транспонирование. Для текущего j определяем

$$G_j^+ = G_{j+1}^-, \quad \Delta\psi_j(m) = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle m, X(\vartheta, \tau) f(\tau, u, v) \rangle d\tau, \quad \varphi_j^+(m) = \{\Delta\psi_j + \varphi_{j+1}^-\}_{G_j^+}^*(m),$$